

等 別：四等考試

類 科：統計

科 目：統計學概要

考試時間：1小時30分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設有一個球箱中放置了 8 顆標記有數字的球，其中 4 顆標記數字"0"，2 顆標記數字"-1"，2 顆標記數字"1"。現在從這個球箱中，以取後放回的方式隨機抽出 2 顆球，球上標記的數字分別為 X_1 ， X_2 ，並計算平均數 $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ 。

(一)寫出此抽樣問題中的母體分配。(3分)

(二)求算母體平均數與母體變異數。(6分)

(三)說明 X_1 ， X_2 兩個隨機變數是否獨立及其理由。(5分)

(四)寫出 \bar{X} 的抽樣分配。(5分)

(五)求算 \bar{X} 的平均數與變異數。(6分)

(六)若同樣以取後放回的方式隨機抽出 4 顆球，求算

$\bar{X}_4 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ 的標準差。(5分)

二、大一統計學課程共有 100 位同學選修該課程，學期中共舉行期中考與期末考兩次考試。假設這兩次考試成績分別符合常態分配 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 與 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。為了想了解該課程同學期中考平均成績與期末考平均成績是否有差異，我們從 100 位同學中隨機抽出 4 位同學並記錄他們的期中考(X)與期末考(Y)成績如下：

(X, Y): (40,60) (60,50) (80,50) (60,80)

(一)請分別估計此課程 100 位同學期中考及期末考成績的平均數。(4分)

(二)請分別估計此課程 100 位同學期中考及期末考成績的變異數。(6分)

(三)請估計此課程 100 位同學期中考成績與期末考成績的相關係數。(6分)

(四)想了解該課程 100 位同學期中考平均成績與期末考平均成績是否有差異，請寫出檢定的虛無假設 H_0 與對立假設 H_1 。(4分)

(五)寫出(四)小題中檢定統計量及其在虛無假設下的分配。(6分)

(六)計算(四)小題中檢定統計量的值。(4分)

三、承前一題中的資料，

(一)如果想了解該課程 100 位同學，期中考成績與期末考成績的變異數是否一樣，這組 4 位同學期中考及期末考成績的變異數是否可用來推導 F 分配？請說明理由。(5 分)

(二)若進一步考慮簡單線性迴歸模型：

$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ ，其中 X 為期中考成績， Y 為期末考成績，

求算判定係數 r^2 (coefficient of determination)，迴歸線截距項估計值 $\hat{\alpha}$ 及迴歸線斜率估計值 $\hat{\beta}$ 。(15 分)

四、(一)假設 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, 為 n 個獨立的隨機變數， \bar{X} 為其平均數， $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ 為變異數。請寫出 $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ 及 $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$ 的分配。(10 分)

(二)自某母體分配中抽取一組樣本數 $n=100$ 的隨機樣本，得樣本平均數 $\bar{x}=50.12$ ，樣本標準差 $s=6.76$ 。若以樣本平均數為母體平均數的估計值，令 e 為其 95% 誤差界限，即 $P(|\bar{X} - \mu| \leq e) = 0.95$ 。請概算誤差界限 e 之值。(10 分)

參考值： $Z_{0.025} = 1.96$